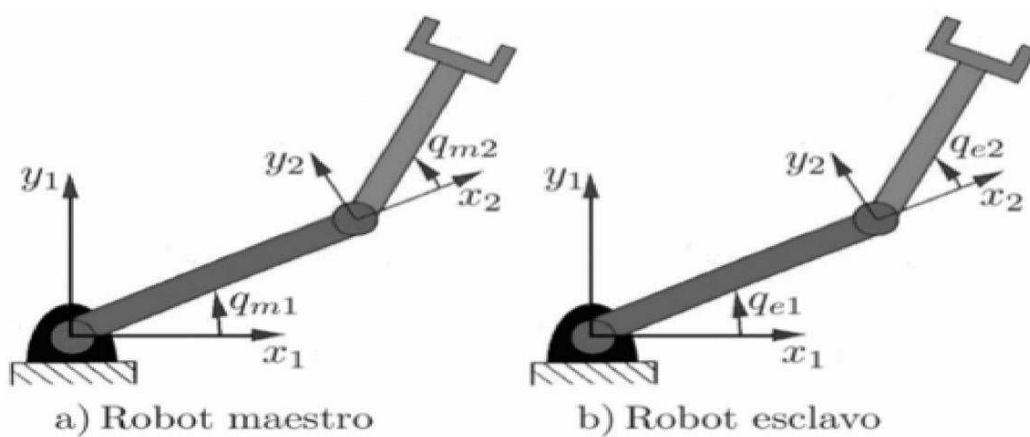


# Sincronización maestro-esclavo en Sistemas Dinámicos Lineales y No Lineales

JESÚS MARTÍNEZ<sup>1</sup>  
SALVADOR A. RODRÍGUEZ<sup>2</sup>  
JESÚS DE LEÓN<sup>3</sup>  
PAOLA A. NIÑO<sup>4</sup>  
JORGE G. ALONSO<sup>5</sup>



## Resumen

Este artículo realiza un estudio teórico del problema de la sincronización maestro-esclavo de Sistemas Lineales y no Lineales constituidos de sistemas homogéneos, así como la implementación a nivel de simulación de las estrategias de seguimiento de trayectoria sincronización y trabajo coordinado por medio del *software* Matlab-Simulink®. Mediante una estrategia de retroalimentación del vector de estados se propone la estrategia de Sincronización maestro-esclavo en Sistemas Lineales. Por otro lado, para el caso de Sistemas no Lineales la estrategia de control para seguimiento de trayectoria es analizada con un enfoque energético específicamente por el método de pasividad. Para hacer frente al problema de no tener acceso completo al vector de estados, se ha propuesto utilizar una herramienta virtual computacional que se encarga de estimar el valor de la velocidad a partir de la medición de la posición la cual normalmente se encuentra disponible.

**Palabras Clave:** Sincronización, Sistemas Lineales, Sistemas no Lineales, maestro-esclavo, observadores.

(1) Sección de Estudios de Posgrado e Investigación, Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica Unidad Azcapotzalco, Instituto Politécnico Nacional. Ciudad de México, México. [ing-ri-jmm@live.com.mx](mailto:ing-ri-jmm@live.com.mx).

(2) Sección de Estudios de Posgrado e Investigación, Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica Unidad Azcapotzalco, Instituto Politécnico Nacional. Ciudad de México, México. [sarodriguezp@ipn.mx](mailto:sarodriguezp@ipn.mx).

(3) Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Universidad Autónoma de Nuevo León. San Nicolás de los Garza, Nuevo León, México. [drjleon@gmail.com](mailto:drjleon@gmail.com).

(4) Sección de Estudios de Posgrado e Investigación, Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica Unidad Azcapotzalco, Instituto Politécnico Nacional. Distrito Federal, México. [pninos@ipn.mx](mailto:pninos@ipn.mx).

(5) Sección de Estudios de Posgrado e Investigación, Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica Unidad Azcapotzalco, Instituto Politécnico Nacional. Distrito Federal, México. [jorgealonsoalfaro@gmail.com](mailto:jorgealonsoalfaro@gmail.com).

Fecha de recepción: 27/09/2016 - Fecha de aceptación: 13/12/2016.

## Introducción

En muchos sistemas de la naturaleza y sistemas creados por el hombre la sincronización es un fenómeno natural, un ejemplo conocido es la sincronización observada entre la rotación y el movimiento orbital de la luna, de tal manera que siempre le da la misma cara a la tierra. El problema es que la sincronización no siempre se da de esa manera natural en todos los sistemas, de ahí que resulta de interés estudiar la posibilidad de forzar a los sistemas a sincronizarse, acoplando otro sistema o agregando las conexiones necesarias para lograr esta sincronización. A este proceso de lograr una sincronización forzada le llamaremos sincronización controlada (Pogromsky et al., 2006).

La sincronización controlada se ha vuelto un tema importante en los últimos años, debido a su aplicación en teleoperación, procesos de manufactura, sistemas trabajando en esquemas coordinados, tareas de ensamble, sistemas multi-robot, etc. El comportamiento colaborativo ofrece flexibilidad y maniobrabilidad que difícilmente puede obtenerse con un sistema individual. Un campo importante dentro del tema de la sincronización es la sincronización de sistemas robóticos (Chung, 2007; Chung & Slotine, 2008; Nijmeijer & Rodríguez, 2003).

Existen otros trabajos realizados sobre sincronización de sistemas dinámicos caóticos o complejos, por ejemplo los abordados en Nijmeijer (2001), Manrubia (2004), Mosekilde et al. (2002) y Ji et al. (2011), donde se estudia la sincronización de sistemas caóticos como sistemas de Lorenz, Jerk y osciladores de Van der Pool.

En este trabajo se presenta un enfoque de sincronización maestro-esclavo, para sistemas conformados por subsistemas con características homogéneas, en el cual se presentan estrategias de control, probadas analíticamente y validadas a nivel simulación para la sincronización de sistemas dinámicos lineales y sistemas dinámicos no lineales. Algunos ejemplos de sistemas lineales son sistemas masa-resorte. Por otro lado, el sistema dinámico no lineal abordado en este artículo está conformado por 2 manipuladores robóticos de 2 grados de libertad, el cual uno funge como maestro y otro como esclavo.

El problema de la sincronización parece ser una sencilla extensión de los controladores de seguimiento clásicos; sin embargo, implica retos que no se consideran en el diseño de estos. En la sincronización de sistemas dinámicos existen varios problemas fundamentales: no tener acceso al vector completo de estados, la influencia de perturbaciones externas sobre los sistemas, no contar con modelos exactos de los sistemas, tener un gran número de sistemas a sincronizar, como están conectados entre ellos, y encontrar la ley de control que se encargue de llevar a todos estos sistemas a la sincronización (Pham & Slotine, 2007; Estrada, 2008; Rosas et al., 2011). El problema de no tener acceso completo al vector de estados se debe a que, en la actualidad, los sistemas no cuentan normalmente con sensores de velocidad o de aceleración, ya que estos, por su alto costo, aumentan de manera considerable el costo de instrumentación de estos. Para hacer frente a esta clase de problemas, se ha propuesto utilizar una herramienta virtual computacional que se encarga de estimar el valor de la velocidad a partir de la medición de la posición, la cual normalmente se encuentra disponible, como se observa en Canudas y Fixot (1991), Berghuis y Nijmeijer (1994), Rodríguez y Nijmeijer (2004), y Nijmeijer y Mareels (1997).

## Metodología

### Sincronización maestro-esclavo de sistemas lineales

En Teoría de Control (Hendricks et al., 2008) es posible ver a los sistemas dinámicos como objetos descritos por sistemas de ecuaciones de primer orden de la forma,

$$\dot{x}=f(x(t),u(t),t); \quad (1)$$

$$y=h(x(t),u(t),t). \quad (2)$$

En el caso general lineal (Hendricks et al., 2008; Chen, 1999), todas las matrices son constantes, y el modelo es llamado Lineal e Invariante en el tiempo (LTI). Este sistema de ecuaciones puede ser escrito como

$$\dot{x}=Ax(t)+Bu(t); \quad (3)$$

$$y=Cx(t)+Du(t). \quad (4)$$

Ahora se proponen los sistemas con características homogéneas que conforman el sistema lineal multicompuesto maestro-esclavo, representado en la Figura 1.



$$\begin{pmatrix} \dot{q}_m \\ \ddot{q}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \emptyset & I \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_m \\ \dot{q}_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \emptyset \\ B_{2,1} \end{pmatrix} u; \quad (5)$$

$$p_m = (I \ \emptyset) \begin{pmatrix} q_m \\ \dot{q}_m \end{pmatrix}; \quad (6)$$

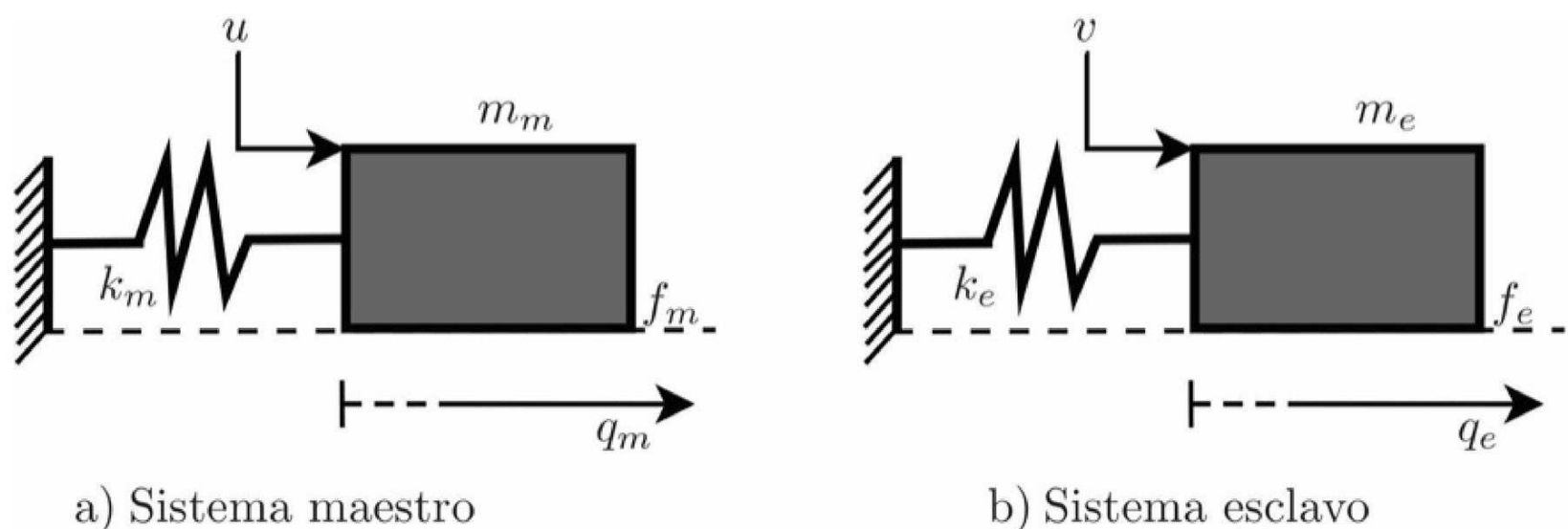
$$\begin{pmatrix} \dot{q}_e \\ \ddot{q}_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \emptyset & I \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_e \\ \dot{q}_e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \emptyset \\ B_{2,1} \end{pmatrix} v; \quad (7)$$

$$p_e = (I \ \emptyset) \begin{pmatrix} q_e \\ \dot{q}_e \end{pmatrix}; \quad (8)$$

donde  $q_m, \dot{q}_m, q_e, \dot{q}_e$  están en  $R^n$ . Se asume que el origen es uno de los puntos de equilibrio del sistema conformado por Ecs. (5), (6). El sistema Ecs. (5), (6) es el maestro, y el sistema Ecs. (7), (8) es el esclavo. La sincronización entre el maestro y el esclavo se produce sin importar cómo se inicializan, y se tiene que asintóticamente sus estados coincidirán, *i.e.*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \begin{pmatrix} q_e \\ \dot{q}_e \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} q_m \\ \dot{q}_m \end{pmatrix} \right\| = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

**Figura 1.** Sistema Dinámico Lineal compuesto por dos sistemas masa resorte



Normalmente, el sistema esclavo Ecs. (7), (8) depende de Ecs. (5), (6) a través de la señal de accionamiento  $p_m = (I \ \emptyset) \begin{pmatrix} q_m \\ \dot{q}_m \end{pmatrix}$ , lo que explica la terminología maestro-esclavo. Es claro que la sincronización sólo se producirá en casos particulares. Una interpretación es ver a Ecs. (7), (8) como un observador de Ecs. (5), (6) dada la señal de salida  $p_m = (I \ \emptyset) \begin{pmatrix} q_m \\ \dot{q}_m \end{pmatrix}$ . Así que en aquellas aplicaciones donde Ecs. (5), (6) es capaz de diseñar libremente a Ecs. (7), (8), se proporciona una posible solución para el problema de sincronización. Sin embargo, los sistemas Ecs. (5), (6) y Ecs. (7), (8) son sistemas que se dan de antemano, de modo que la sincronización no ocurrirá en forma general, y por lo que se puede considerar una versión controlada del problema, en la que permitimos que la dinámica del esclavo dependa de una variable de control  $v$ .

El problema de sincronización controlada formulado anteriormente se puede ver como un problema extendido de seguimiento de trayectoria. La sincronización se da cuando Ec. (5), (6) genera las señales que debe seguir Ec. (7), (8).

Para esto se necesita de un compensador tal que el error de sincronización  $e_s(t) := q_e - q_m$  satisfaga

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_s(t) = 0 \quad (10)$$

A continuación se reescribe el sistema Ecs. (5), (6) y Ecs. (7), (8) en la forma general de un Sistema Lineal propuesto en Ecs. (3), (4), el maestro:

$$\dot{q}_m = Aq_m + Bu; \quad (11)$$

$$p_m = Cq_m; \quad (12)$$

y el esclavo

$$\dot{q}_e = Aq_e + Bv; \quad (13)$$

$$p_e = Cq_e; \quad (14)$$

con  $q_m, q_e \in R^{2n}$  y  $u, v \in R^m$ . Bajo el supuesto de que  $(C, A)$  es observable y  $(A, B)$  es controlable, el problema de sincronización controlada tiene solución (Huijberts et al., 2000).

Puesto que  $(C, A)$  es observable, existe una matriz  $K$  de tal manera que todos los valores propios de  $(A + KC)$  están en la parte izquierda abierta del plano complejo. Además, el hecho

de que  $(A, B)$  es controlable implica que existe una matriz  $F$ , de tal manera que todos los valores propios de  $(A+BF)$  están en el parte izquierda abierta del plano complejo. Con lo cual se puede comprobar que por medio de retroalimentación estática se resuelve el problema de sincronización controlada. Enseguida se analiza a detalle esta propuesta.

Considere el sistema maestro Ecs. (11), (12) definido para todo  $q_0 \in R^n, u \in R^m$  y el controlador:

$$\dot{\bar{q}}_m = A\bar{q}_m + B\phi; \quad (15)$$

$$\bar{p}_m = C\bar{q}_m. \quad (16)$$

Para garantizar la estabilidad, se reescriben los sistemas Ec. (11), (12) y Ec. (15), (16) en el espacio del error.

$$e := q_m - \bar{q}_m; \quad (17)$$

entonces

$$\dot{e} = A(q_m - \bar{q}_m) + B(u - \phi); \quad (18)$$

por lo tanto, se selecciona el control

$$u = (Fe + \phi); \quad F \in R^{m \times n}; \quad (19)$$

así el sistema Ec. (18) en lazo cerrado se escribe como

$$\dot{e} = (A+BF)e; \quad (20)$$

el cual es estable si los valores propios de  $(A+BF)$  se encuentran en la parte izquierda abierta del plano complejo para toda  $F$ .

De forma semejante, en Luenberger (1966) se presenta un observador, asociado a Ecs. (11), (12) *i.e.*

$$\dot{\hat{q}}_m = A\hat{q}_m + B_u + K(\hat{p}_m - p_m); \quad (21)$$

$$\hat{p}_m = C\hat{q}_m + Du; \quad (22)$$

enseguida se reescriben los sistemas Ecs. (11), (12) y Ecs. (21), (22) en el espacio del error

$$\xi = \hat{q}_m - q_m; \quad (23)$$

así el sistema retroalimentado es

$$\dot{\xi} = (A+KC)\xi; \quad (24)$$

Representando el sistema maestro con su controlador y observador en el dominio del error se tiene:

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{e} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} A+KC & \phi \\ BF & A+BF \end{pmatrix}}_{\Lambda} \begin{pmatrix} \xi \\ e \end{pmatrix}; \quad (25)$$

el sistema es estable si se verifica que los valores propios de  $\Lambda$  se encuentran en la parte izquierda abierta del plano complejo.

De interés es inducir las trayectorias estimadas  $\hat{q}_m$  del sistema maestro al sistema esclavo Ecs. (13), (14), de tal manera que se cumpla Ec. (10). Por lo cual se propone la siguiente ley de control de sincronización:

$$\dot{\hat{q}}_m = A\hat{q}_m + B\Phi_s; \quad (26)$$

$$\hat{p}_m = C\hat{q}_m. \quad (27)$$

Reescribiendo los sistemas Ecs. (13), (14) y Ecs. (26), (27) en el espacio del error se tiene:

$$e_s := q_e - \hat{q}_m; \quad (28)$$

por lo tanto, el controlador propuesto para el sistema esclavo Ecs. (13), (14) es:

$$v = Ge_s + \Phi_s; \quad G \in R^{m \times n}. \quad (29)$$

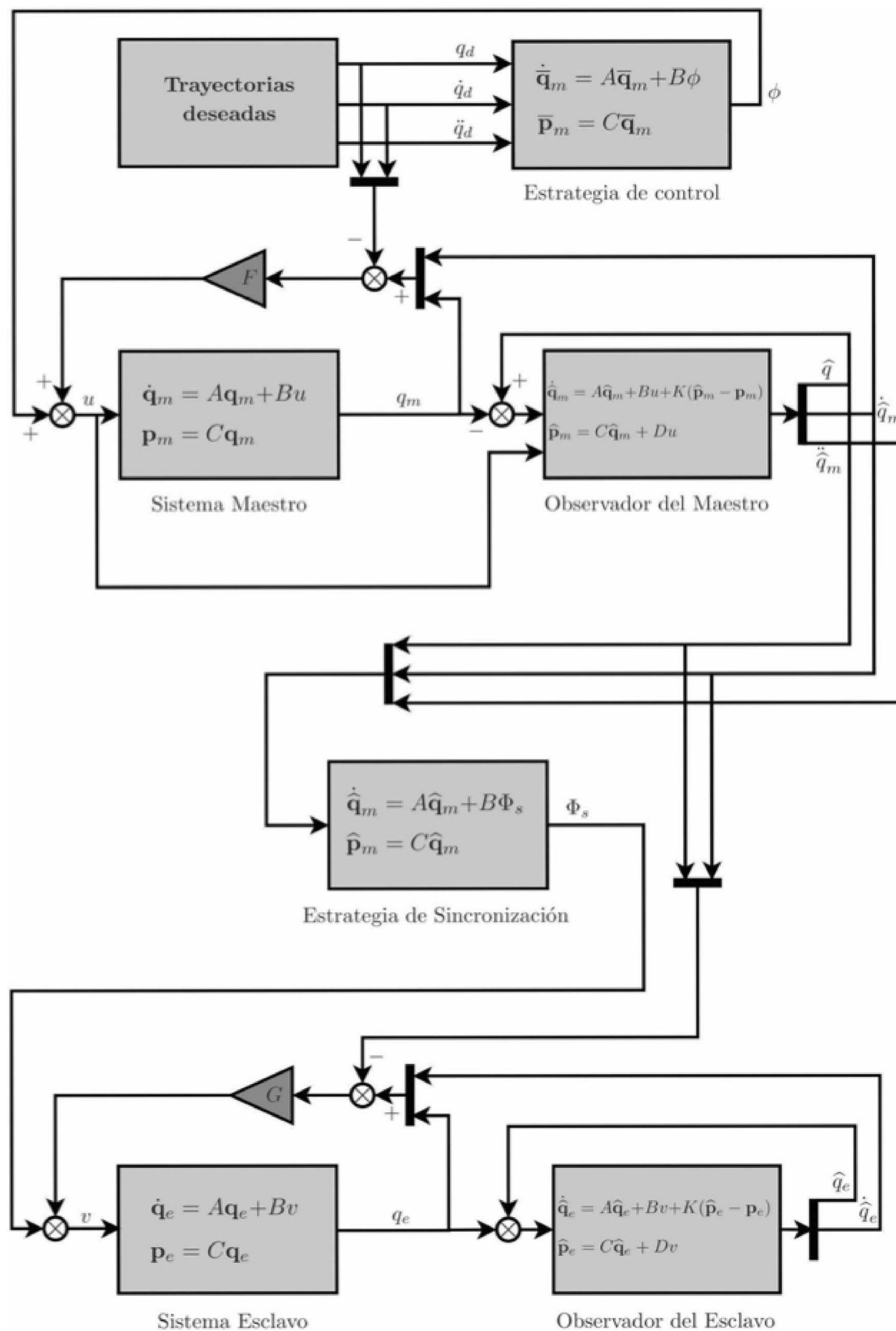
Así en lazo cerrado la sincronización maestro-esclavo de un Sistema Dinámico Lineal se reescribe como:

$$\dot{e}_s = (A+BG)e_s; \quad (30)$$

el cual es estable si los valores propios de  $(A+BG)$  se encuentran en la parte izquierda abierta del plano complejo para toda  $G \in R^{m \times n}$ .

Una representación gráfica de este tipo de sincronización se encuentra en el diagrama de bloques de la Figura 2.

**Figura 2.** Diagrama de control que representa la sincronización maestro-esclavo en Sistemas Dinámicos Lineales con características homogéneas

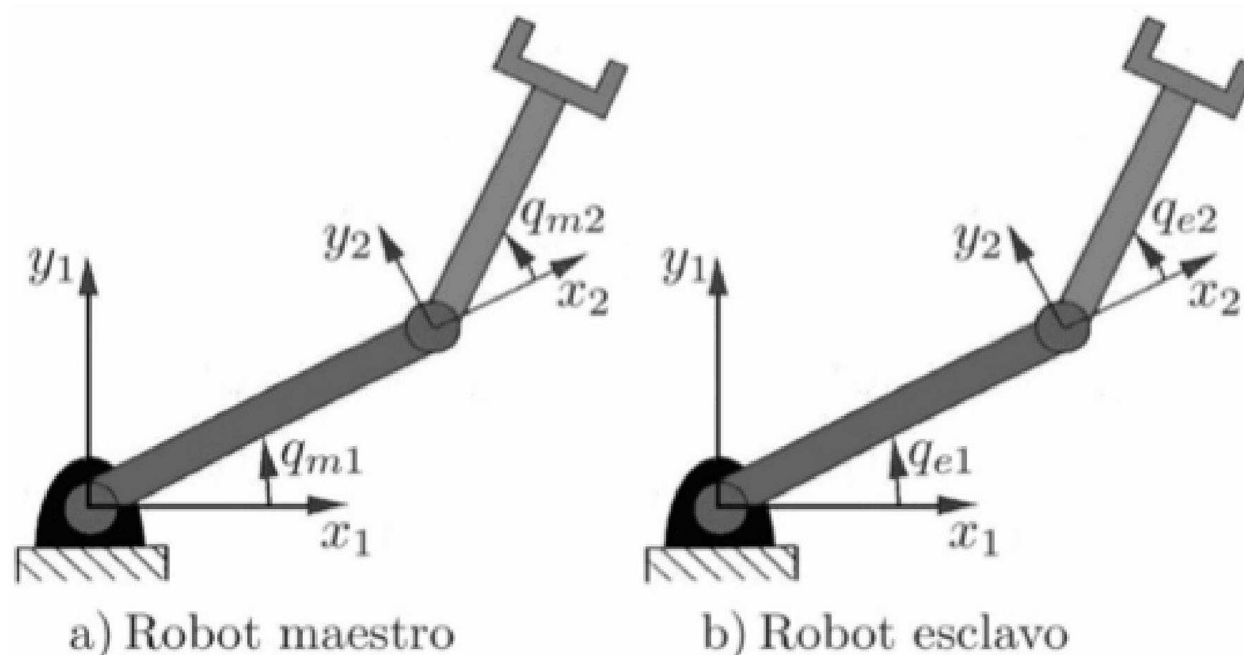


### Sincronización de Sistemas no Lineales

En la conformación de sistemas cooperativos de robots manipuladores, la investigación ha dado como resultado la síntesis de múltiples leyes de control. Sin embargo, al hablar de aplicaciones reales, surgen diferentes problemas relacionados con restricciones físicas o bien de costo. Por lo tanto, resulta de gran importancia el análisis de

técnicas de sincronización que provean del máximo de beneficios y que resuelvan inconvenientes experimentados por otros esquemas de control. Un Sistema Dinámico no Lineal conformado por manipuladores robóticos con características homogéneas en sincronización maestro-esclavo, como el que se encuentra en la Figura 3, es analizado enseguida desde un enfoque energético.



**Figura 3.** Robots coordinados por medio de Sincronización maestro-esclavo


### Definición del Sistema Lagrangiano Multi-robot

En Chung y Slotine (2008), Chao et al. (2014) y Abdelkader et al. (2014), se plantea la utilización de la formulación de Lagrange por su simplicidad en el tratamiento de sistemas complejos involucrados en dinámicas múltiples. Las ecuaciones de movimiento para un robot con múltiples articulaciones ( $q_i \in R^n$ ) se pueden derivar por medio de las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$L_i = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_i^T \mathbf{M}_i(\mathbf{q}_i) \dot{\mathbf{q}}_i - V_i;$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} \right] - \frac{\partial L_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)}{\partial \mathbf{q}_i} = \boldsymbol{\tau}_i; \quad (31)$$

donde ( $1 \leq i \leq p$ ) denota el índice del robot o sistema dinámico que comprenden una red, y  $p$  es el número total de los elementos individuales. Para este caso particular Ec. (31) puede ser representada como:

$$M_i(q_i) \ddot{q}_i + C_i(q_i, \dot{q}_i) \dot{q}_i + g_i(q_i) = \tau_i; \quad (32)$$

donde  $g_i(q_i) = \frac{\partial V_i}{\partial q_i} \in R^n$  y denota las fuerzas de gravedad,  $\tau_i$  son las fuerzas generalizadas o torques actuando en el  $i$ -ésimo robot (para este caso particular,  $i=m, e$ ) y  $C_i(q_i, \dot{q}_i) \dot{q}_i \in R^n$  representan las fuerzas de Coriolis y centrífugas.

Para este caso definamos al sistema maestro como:

$$M_m(q_m) \ddot{q}_m + C_m(q_m, \dot{q}_m) \dot{q}_m + g_m(q_m) = \tau_m; \quad (33)$$

y el esclavo:

$$M_e(q_e) \ddot{q}_e + C_e(q_e, \dot{q}_e) \dot{q}_e + g_e(q_e) = \tau_e. \quad (34)$$

En *Sincronización de Sistemas Robóticos* existen dos tareas importantes de control. La primera es plantear una estrategia de control que permita que el sistema *Maestro* pueda seguir una trayectoria deseada. Y la segunda plantear una estrategia de control de sincronización maestro-esclavo.

De acuerdo con la propuesta de Paden (1988), se propone el siguiente controlador *PD+* para seguimiento de trayectoria,

$$\tau_m = M_m(q_m) \ddot{q}_d + C_m(q_m, \dot{q}_m) \dot{q}_d + g_m(q_m) - K_p e_d - K_v \dot{e}_d; K_p = K_p^T > 0; K_v = K_v^T > 0. \quad (35)$$

El control *PD+*, es un algoritmo de control que incluye control proporcional del error de posición, control proporcional del error de velocidad más la dinámica completa de robot. En la estructura de este esquema de control también se involucra la trayectoria de seguimiento, velocidad y aceleración deseada.

La implementación del esquema de control Ec. (35), requiere del conocimiento exacto del modelo dinámico del robot, lo cual significa que los valores numéricos de sus parámetros dinámicos se conocen (Reyes, 2011).

Por otro lado, para que el sistema alcance una sincronización maestro-esclavo se requiere que  $q_e$  alcance la referencia  $q_m$ , por lo que los errores de sincronización  $e_s, \dot{e}_s, \ddot{e}_s \in R^n$  están definidos por:

$$e_s = q_e - q_m; \dot{e}_s = \dot{q}_e - \dot{q}_m; \ddot{e}_s = \ddot{q}_e - \ddot{q}_m. \quad (36)$$

Partiendo de Ec. (36) se puede la reescribir la ecuación del esclavo Ec. (34) como:

$$M_e(q_e) \ddot{e}_s + C_e(q_e, \dot{q}_e) \dot{e}_s + g_e(q_e) = \tau_e; \quad (37)$$

donde el objetivo es  $(e_s, \dot{e}_s) = (0, 0)$ , por lo que se propone la siguiente ley de control:

$$\begin{aligned} \tau_e &= M_e(q_e)\ddot{q}_m + C_e(q_e, \dot{q}_e)\dot{q}_m + g_e(q_e) - K_p e_s - K_v \dot{e}_s; \\ K_p &= K_p^T > 0; K_v = K_v^T > 0; \end{aligned} \quad (38)$$

ahora se propone la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$v = 1/2 \dot{e}_s^T M_e(q_e) \dot{e}_s + 1/2 e_s^T K_p e_s; K_p = K_p^T > 0. \quad (39)$$

Para garantizar la estabilidad de Ec. (38), se realiza:

$$\dot{v} = \dot{e}_s^T M_e(q_e) \ddot{e}_s + 1/2 \dot{e}_s^T \dot{M}_e(q_e) \dot{e}_s + e_s^T K_p e_s; \quad (40)$$

aplicando la propiedad de antisimetría en (40) se tiene,

$$\dot{v} = -\dot{e}_s^T C_e(q_e, \dot{q}_e) \dot{e}_s - \dot{e}_s^T K_p e_s - \dot{e}_s^T K_v \dot{e}_s + 1/2 \dot{e}_s^T \dot{M}_e(q_e) \dot{e}_s + \dot{e}_s^T K_p e_s; \quad (41)$$

$$\dot{v} = -\dot{e}_s^T K_v \dot{e}_s \leq 0; \quad (42)$$

por lo tanto, Ec. (38) es estable y se logra la sincronización entre Ec. (33) y Ec. (34).

Si no se conoce  $\dot{q}_m, \ddot{q}_m$  se estiman  $\hat{q}_m, \hat{\ddot{q}}_m$ , con lo cual la ley de control de sincronización Ec. (38), se reescribe de la forma siguiente

$$\begin{aligned} \tau_e &= M_e(q_e)\hat{\ddot{q}}_m + C_e(q_e, \hat{\dot{q}}_e)\hat{\dot{q}}_m + g_e(q_e) - K_p e_s - K_v \dot{e}_s; \\ K_p &= K_p^T > 0; K_v = K_v^T > 0; \end{aligned} \quad (43)$$

donde  $\hat{q}_m, \hat{\dot{q}}_e, \hat{\ddot{q}}_m \in R^n$  representan la estimación de  $q_m, \dot{q}_e$  y  $\ddot{q}_m$  respectivamente, además  $\hat{e}_s$  es

$$\hat{e}_s = \dot{q}_e - \hat{\dot{q}}_m; \quad (44)$$

En Berghuis y Nijmeijer (1993) se propone un observador no lineal desde un enfoque de pasividad para robots manipuladores, este es utilizado para poder estimar  $\hat{q}_m, \hat{\dot{q}}_m, \hat{\ddot{q}}_m$ . Este observador tiene la estructura siguiente en variables de estado

$$\dot{\hat{q}}_m = z + L_d \hat{q}_m; \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \dot{z} &= M_m(q_m)[\tau_m - C_m(q_m, \dot{q}_0)\dot{q}_0 + g_m(q_m) + L_{p1}\tilde{q}_m] \\ &L_{p2}\tilde{q}_m; \end{aligned} \quad (46)$$

donde  $[\hat{q}_m^T z^T]$  son los estados del observador,  $\hat{q}_m$  representa la estimación de  $q_m$ ,  $\tilde{q}_m \equiv q_m - \hat{q}_m$  es el error de estimación de posición del robot maestro,  $L_d = L_d^T > 0$ ,  $L_{p1} = L_{p1}^T \geq 0$ ,  $L_{p2} = L_{p2}^T > 0$ , y

$$\dot{q}_0 = \hat{\dot{q}}_m - A_2 \tilde{q}_m; \quad (47)$$

$$\text{con } A_2 = A_2^T \geq 0.$$

Se asume que  $L_d, L_{p1}, L_{p2}$  y  $A_2$  son matrices constantes y diagonales. Sin embargo,  $L_d$  y  $L_{p2}$ , pueden ser escritos como:

$$L_d = l_d I + A_2; \quad (48)$$

$$L_{p2} = l_d A_2; \quad (49)$$

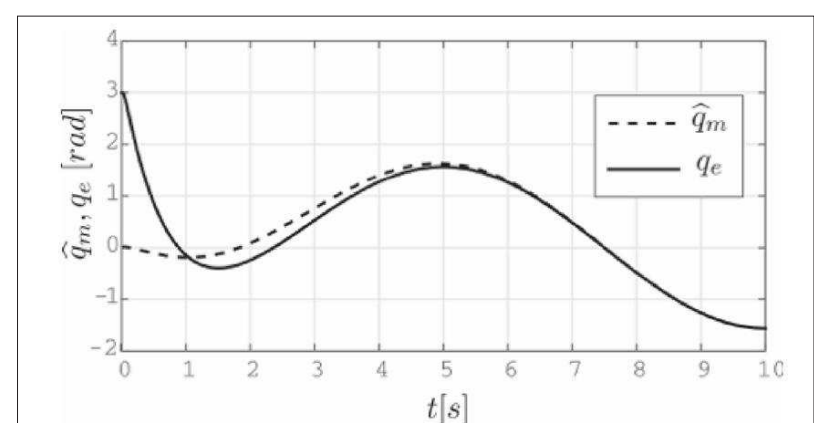
donde  $l_d > 0$  y escalar.

Del mismo modo se puede construir un observador para obtener  $\hat{q}_e, \hat{\dot{q}}_e, \hat{\ddot{q}}_e \in R^n$  que representan la estimación de los estados del robot esclavo  $q_e, \dot{q}_e$  y  $\ddot{q}_e$  respectivamente.

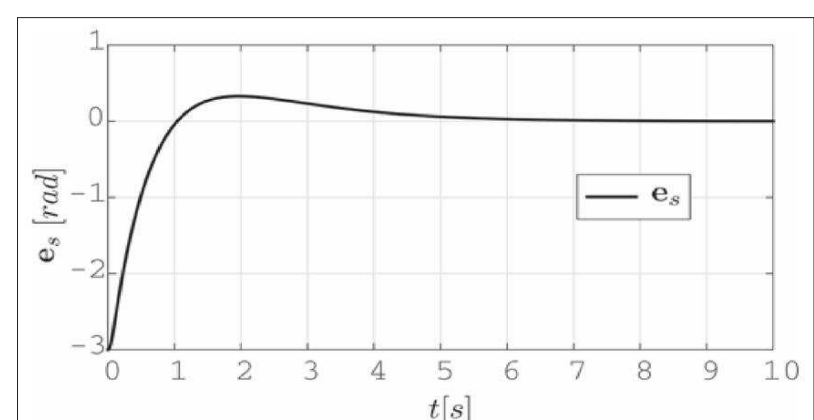
## Resultados

Por medio de Matlab-Simulink® se realizó la simulación de los sistemas maestro esclavo. En la gráfica mostrada en la Figura 4, se observa como la sincronización maestro-esclavo de un Sistema Dinámico Lineal masa resorte. Seleccionando los valores apropiados de las ganancias  $K$  y  $F$ , el sistema esclavo logra alcanzar la trayectoria del maestro en aproximadamente 6 segundos por consiguiente Ec. (10) se cumple como se observa en la Figura 5.

**Figura 4.** Sincronización maestro-esclavo en Sistemas Dinámicos Lineales



**Figura 5.** Error de Sincronización Sistemas Dinámicos Lineales. Se observa cómo el error de sincronización tiende a cero cuando el tiempo tiende a infinito

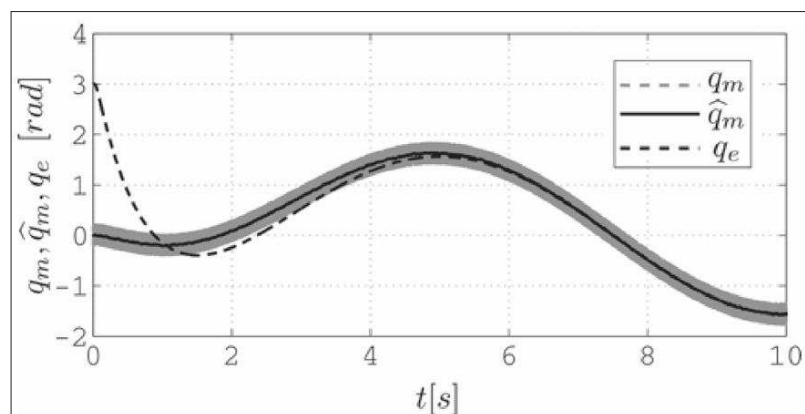


En la Figura 6 se observa cómo el observador lineal propuesto en Ecs. (21), (22) también reduce



considerablemente el ruido existente durante la medición, lo que permite que el sistema maestro induzca trayectorias filtradas al sistema esclavo.

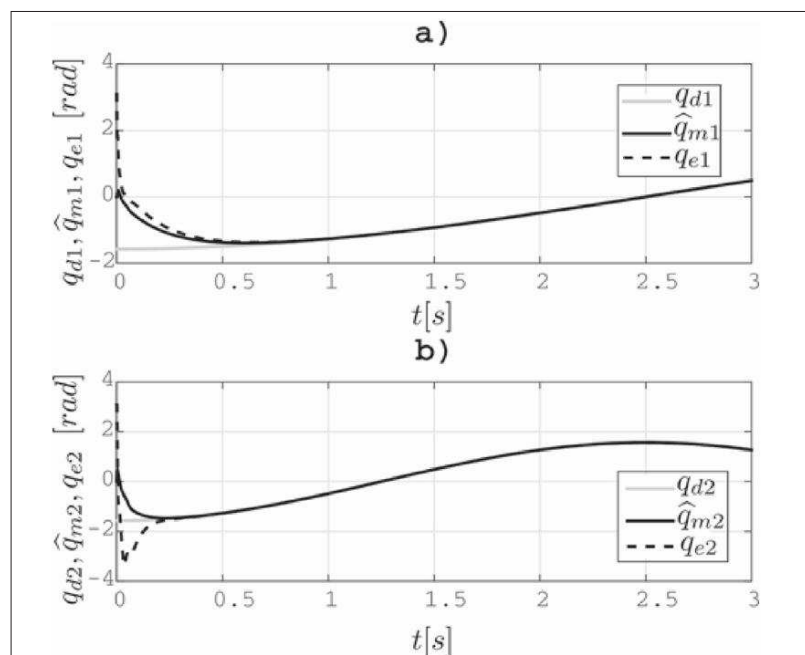
**Figura 6.** Gráfica que muestra la acción de filtrado por medio de la estimación del vector de estado que realiza el Observador Lineal



Por otro lado, se propuso un Sistema Multi-robot maestro-esclavo como sistema no lineal. A nivel simulación, Robots articulados de 2 grados de libertad y con características homogéneas, consiguen sincronizarse haciendo una adecuada selección de las ganancias  $K_p$  y  $K_v$  de la ley de sincronización mostrada en Ec. (43), así como también de las ganancias  $L_d$ ,  $L_{p1}$  y  $L_{p2}$  del observador no lineal propuesto en Ec. (45) para encontrar  $\hat{q}_m$ ,  $\dot{\hat{q}}_m$ ,  $\ddot{\hat{q}}_m$  del robot maestro y  $\hat{q}_e$ ,  $\dot{\hat{q}}_e$ ,  $\ddot{\hat{q}}_e$  del robot esclavo.

En este caso es importante observar que la sincronización se logra en las 2 articulaciones como se observa en la Figura 7.

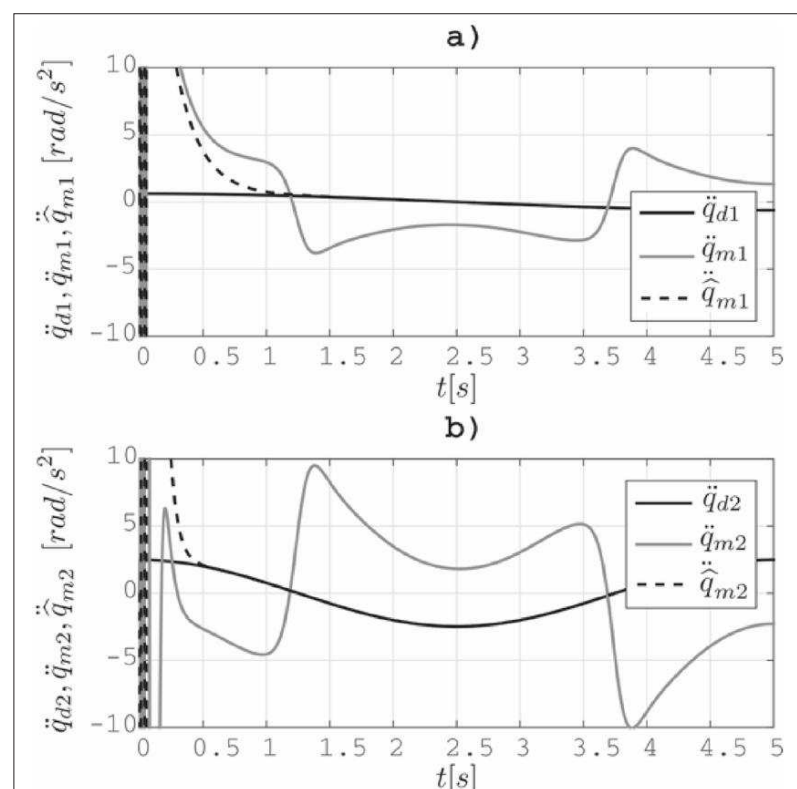
**Figura 7.** Sincronización maestro-esclavo de un sistema multi-robot de 2 grados de libertad, donde un robot maestro sigue trayectorias deseadas y un robot esclavo sigue las trayectorias estimadas del maestro. a) Sincronización que se da por medio de las primeras articulaciones. b) Sincronización que se da por medio de las segundas articulaciones



Cabe mencionar que las trayectorias que alcanza el sistema esclavo son las estimadas del robot esclavo es decir,  $\hat{q}_m^T = (\hat{q}_{m1} \hat{q}_{m2})$ .

Otro resultado que es importante mencionar es que el observador no lineal propuesto no solo permite estimar los estados  $\dot{\hat{q}}_m$  y  $\ddot{\hat{q}}_m$ , también nos ayuda a reducir considerablemente el ruido de medición principalmente a nivel de aceleración, como puede compararse en la Figura 8.

**Figura 8.** Gráficas que muestran el efecto de filtrado por medio del observador no lineal adaptivo propuesto. a) Comparación entre las señales  $\ddot{q}_{d1}$ ,  $\ddot{q}_{m1}$  y  $\ddot{\hat{q}}_{m1}$ . b) Comparación entre las señales  $\ddot{q}_{d2}$ ,  $\ddot{q}_{m2}$  y  $\ddot{\hat{q}}_{m2}$



### Conclusiones

Con esto se concluye que la sincronización artificial o controlada de sistemas dinámicos se logra siempre y cuando se generan las condiciones necesarias de conexión o acoplamiento entre sistemas maestro-esclavo y de estimación completa del vector de estado. También es importante mencionar que la herramienta computacional conocida como observador, además de que nos permite estimar el vector completo de estados, también sirve para reducir notablemente el ruido producido por la instrumentación, ya que funge como filtro. Como trabajo futuro se sugiere comprobar estas estrategias de control de sincronización a nivel experimental, así como probar estrategias de control en redes de sistemas dinámicos donde existan más de dos sistemas idénticos o no homogéneos.



## Agradecimientos

Al CONACYT por el apoyo brindado y hacer posible estos trabajos de investigación, al Instituto Politécnico Nacional (IPN) por el apoyo brindado en todo momento. En particular por el apoyo al Proyecto SIP: 20171573. ●

## Referencias

- Abdelkader, A. et al. (2014). Synchronization of Lagrangian Systems With Irregular Communication Delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 59, 1, 187 - 193.
- Berghuis, H. & Nijmeijer, H. (1993). A Passivity Approach to Controller-Observer Design for Robots. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 9, 6, 740 - 754.
- (1994). Robust Control of Robots via Linear Estimated State Feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39, 10, 2159 - 2162.
- Canudas, C. & Fixot, N. (1991). Robot Control Via Robust Estimated State Feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control* 36, 12, 1497 - 1501.
- Chao, M. et al. (2014). Synchronization of networked Euler-Lagrange systems by sampled-data communication with time-varying transmission delays under directed topology. *Neurocomputing*.
- Chen, T. (1999). *Linear Systems Theory and Design*. Oxford: Oxford University Press, Inc.
- Chung, S. (2007). *Nonlinear Control and Synchronization of Multiple Lagrangian Systems with Applications to Tethered Formation Flight Spacecraft* (doctoral thesis). Massachusetts Institute of Technology (MIT).
- Chung, S. & Slotine, J. (2008). Cooperative Robot Control and Concurrent Synchronization of Lagrangian Systems. *IEEE Transactions on Robotics*, 25, 3, 686 - 700.
- Estrada, H. (2008). *Sincronización de sistemas mecánicos con retardos en la transmisión de datos* (doctoral thesis). Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada (CICESE).
- Hendricks, E. et al. (2008). *Linear Systems Control, Deterministic and Stochastic Methods*. Berlín: Springer-Verlag.
- Huijberts, H., Nijmeijer, H. & Willems, R. (2000). Regulation and controlled synchronization for complex dynamical systems. *Int. J. Robust Nonlinear Control*, 10, 363 - 377.
- Ji, D. et al. (2011). Synchronization of neutral complex dynamical networks with coupling time-varying delays. *Nonlinear Dyn., Springer Science Business Media B.V.*, 65, 349 - 358.
- Luenberger, D. (1966). Observers for Multivariable Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1, 2, 190 - 197.
- Manrubia, M. (2004). *Emergence of Dynamical Order - Synchronization Phenomena in Complex Systems*. s. l.: World Scientific Publishing.
- Mosekilde, E., Maistrenko, Y. & Postnov, D. (2002). *Chaotic Synchronization - Application to Living Systems*. s. l.: World Scientific Publishing.
- Nijmeijer, H. (2001). A dynamical control view on synchronization. *Physica D*, 154, 219 - 228.
- Nijmeijer, H. & Mareels, I. (1997). An Observer Looks at Synchronization. *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications*, 44, 10, 882 - 890.
- Nijmeijer, H. & Rodríguez, A. (2003). *Synchronization of Mechanical Systems*. s. l.: Series Editor: Leon O. Chua. World Scientific Publishing Co. Pte.
- Paden, B. & Panja R. (1988). Globally asymptotically stable 'PD+' controller for robot manipulators. *Int. J. Control*, 47, 6, 1697 - 1712.
- Pham, Q. & Slotine, J. (2007). Stable concurrent synchronization in dynamic system networks. *Neural Networks*, 20, 62 - 77.
- Pogromsky, A., Belykh, V. & Nijmeijer, H. (2006). A Study of Controlled Synchronization of Huygens' Pendula. K.Y. Pettersen et al. (Eds.), *Group Coord. and Cooperat. Cntrl., LNCIS 336, Springer-Verlag Berlin Heidelberg*, 205 - 216.
- Reyes, F. (2011). *Robótica, Control de Robots Manipuladores*. México: Editorial Alfaomega.
- Rodríguez, A. & Nijmeijer, H. (2004). Mutual Synchronization of Robots via Estimated State Feedback: A Cooperative Approach. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 12, 4, 542 - 554.
- Rosas, D., Álvarez, J. & Álvarez, E. (2011). Robust synchronization of arrays of uncertain nonlinear second-order dynamical systems. *Nonlinear Dyn., Springer Science+Business Media B.V.*, 67, 2735 - 2746.